Die reellwertige Funktion $f(q)$ einer reellen Veränderlichen $q \neq 1$

$$f(q) = \frac{1}{1-q}$$

ist nach dem Lehrsatz von TAYLOR entwickelbar in die Potenzreihe

$$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

welche für alle q mit $|q| < 1$ (gegen den Funktionswert) konvergiert. Diese Entwicklung gilt auch für komplexe q mit $|q| < 1$. Für $q \to 1$ liegt eine Unendlichkeitstelle (Nullstelle des Nenners oder *Singularität*) vor, daher ist die Funktion für $|q| = 1$ sicher *nicht* entwickelbar. Es gilt aber

$$\frac{1}{1-q} = -\frac{1}{q(1-\frac{1}{q})} = -\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)\left(\frac{1}{q}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)q^{-k}$$

Diese Reihe konvergiert für $|\frac{1}{q}| < 1$, also $|q| > 1$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

heißt LAURENT-Reihe mit der Anschlusstelle z_0. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ wird der *Potenzreihenanteil* genannt, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{-k}$ ist der sogenannte *Hauptteil* (sind unendlich viele Koeffizienten des Hauptteils bei einer Entwicklung an einer Singularität ungleich 0, so spricht man von einer *wesentlichen Singularität*). Der Konvergenzbereich einer Laurent-Reihe ist stets ein *Kreisring* in der komplexen Zahlenebene, wobei die Reihe für alle komplexen Zahlen im Inneren des Kreisringes gegen den Funktionswert an dieser Stelle konvergiert. Außerdem ist die Laurent-Reihe, analog zur Taylorreihe, im Inneren des Konvergenzbereiches gliedweise differenzierbar und integrierbar. Ferner ist der Konvergenzbereich stets maximal, das heißt, er reicht immer bis zur nächsten Singularität.

Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f(x)$ einer komplexen Veränderlichen, deren Entwicklung in eine Laurent-Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

für alle komplexen z mit $|z| = 1$ (der Einheitskreis) konvergiert. Diese sogenannten unimodularen Zahlen haben alle eine Darstellung als $e^{i\varphi}$. Wir können $f(z)$ für $|z| = 1$ also auffassen als rellwertige Funktion einer *reellen* Veränderlichen φ mit

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{i\varphi})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$$

Damit ist $f(\varphi)$ jedenfalls periodisch mit der Periode 2π, also $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$. Nun ist (wegen der gliedweisen Integrierbarkeit) für beliebiges reelles α

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{in\varphi}d\varphi$$

und (für $k \neq 0$) wegen

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{ik\varphi} = \frac{e^{ik(\alpha+2\pi)}}{ik} - \frac{e^{ik\alpha}}{ik} = \frac{e^{ik\alpha}e^{i2k\pi}}{ik} - \frac{e^{ik\alpha}}{ik} = \frac{e^{ik\alpha}\cdot 1}{ik} - \frac{e^{ik\alpha}}{ik} = 0$$

von Markus Triska, triska@gmx.at, 14. Nov. 2003

ist

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)d\varphi = c_0 \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} 1d\varphi = c_0 \cdot \left(\varphi\Big|_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\right) = 2\pi c_0$$

Das heißt, das (bestimmte) Integral über eine beliebige Periode der Länger 2π hängt lediglich vom Koeffizienten c_0 ab. Nun ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)d\varphi$$

Für die anderen Koeffizienten $m \neq 0$ betrachten wir $f(\varphi) \cdot e^{-im\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-m)\varphi}$ und erhalten analog

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi$$

Ist eine reellwertige Funktion $f(\varphi)$ periodisch mit Periode 2π, und existieren die Koffizienten c_m wie oben definiert, und ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}$ gleichmäßig konvergent, so heißt diese Reihe die der Funktion $f(\varphi)$ zugeordnete Fourier-Reihe, oder kurz ihre Fourier-Reihe (in komplexer Schreibweise), in Zeichen

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Es gilt: die obigen Bedingungen sind erfüllt, falls $f(\varphi)$ stückweise glatt (stetig differenzierbar) ist, das heißt jedes Intervall der Länge 2π ist zerlegbar in endlich viele Teilintervalle, sodass $f(\varphi)$ auf jedem dieser Teilintervalle differenzierbar und die Ableitung stetig ist. An den Stetigkeitsstellen wird $f(\varphi)$ dargestellt, an den Sprungstellen das arithmetische Mittel der einseitigen Limiten.

Beispiel (Sägezahnkurve): Man entwickle die "Sägezahnkurve" gegeben durch $y = x$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre komplexe Fourierreihe.
Es ist $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$ und (für $m \neq 0$) $a_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-imx}dx = -\frac{1}{im}e^{im\pi}$. Wegen $e^{im\pi} = \cos(m\pi) + i\sin(m\pi) = (-1)^m$ erhalten wir $a_m = \frac{(-1)^{m+1}}{im}$ und somit

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{ixn}$$

Beispiel (Girlande): Man entwickle die "Girlande" gegeben durch $y = x^2$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre komplexe Fourierreihe.
Es ist $a_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$ und (für $m \neq 0$) $a_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}e^{im\pi}\frac{4\pi}{m^2} = (-1)^m\frac{2}{m^2}$, daher also

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^2} e^{ikx}$$

Fassen wir in der obigen Reihe jeweils die Glieder $c_m e^{imx}$ und $c_{-m}e^{-imx}$ $(m \neq 0)$ zusammen, so ist

$$\begin{aligned} c_m e^{imx} + c_{-m}e^{-imx} &= c_m(\cos(mx) + i\sin(mx)) + c_{-m}(\cos(-mx) + i\sin(-mx)) \\ &= c_m(\cos(mx) + i\sin(mx)) + c_{-m}(\cos(mx) - i\sin(mx)) \\ &= (c_m + c_{-m})\cos(mx) + i(c_m - c_{-m})\sin(mx) \end{aligned}$$

von Markus Triska, triska@gmx.at, 14. Nov. 2003

Da $f(\varphi)$ nach Voraussetzung reellwertig ist, muss $\overline{f(\varphi)} = f(\varphi)$ gelten. Wegen

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(\varphi) e^{-im\varphi}} d\varphi = \overline{c_m}$$

sind die Faktoren $(c_m + c_{-m})$ und $(c_m - c_{-m})$ beide reell, und wir erhalten

$$(c_m + c_{-m}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)(e^{-im\varphi} + e^{im\varphi}) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) \frac{e^{-im\varphi} + e^{im\varphi}}{2} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi$$

analog erhalten wir

$$i(c_m - c_{-m}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi$$

Wir definieren nun

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

und für $m \geq 1$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) cos(m\varphi) d\varphi \qquad\qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi$$

Dies führt zur *reellen Darstellung* der Fourierreihe (Fourier-Polynom)

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx)$$

Beispiel (Sägezahnkurve): Man entwickle die "Sägezahnkurve" gegeben durch $y = x$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.
Da die Funktion ungerade ist ($f(-x) = -f(x)$), sind alle $a_m = 0$. Es bleiben $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx) dx = -\frac{2}{m} \cos(m\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{m+1}$ und somit

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2 \sin(kx)}{k}$$

Bemerkung: An der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ und damit $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Beispiel (Girlande): Man entwickle die "Girlande" gegeben durch $y = x^2$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4 \cos(kx)}{k^2}$$

Bemerkung: An der Stelle $x_0 = \pi$ ist $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot 4 \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$ und damit $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

von Markus Triska, triska@gmx.at, 14. Nov. 2003